Understanding, modeling and managing longevity risk: some new challenges

Stéphane Loisel

ISFA, Univ. Lyon 1

loisel@univ-lyon1.fr

1ères JEEA

Sommaire

Joint work with:

- Pauline Barrieu, Harry Bensusan, Nicole El Karoui, Caroline Hillairet, Claudia Ravanelli et Yahia Salhi (équipe de la chaire Dérivés du Futur)

  Understanding, modelling and managing longevity risk: key issues and new challenges

- Yahia Salhi et Michel Denuit

  Cointegration entre longévité de la population assurée et longévité de la population nationale

- Martin Jimenez

  Variable annuities: on the evaluation of GMWB's

- Daniel Serant & SCOR Global Life

- Retour sur l’exposé d’Olivier:

Le risque de longévité est à la limite de l’assurabilité

- Retour sur l’exposé d’Olivier:

Le risque de longévité est à la limite de l’assurabilité

=

Si vous souhaitez vous réassurer, ça va vous coûter très cher!

- Théorème fondamental de la réassurance:

(aussi appelé théorème de Baden-Baden)

- Théorème fondamental de la réassurance:

Tout risque d'assurance est à la limite de l'assurabilité.

Données françaises

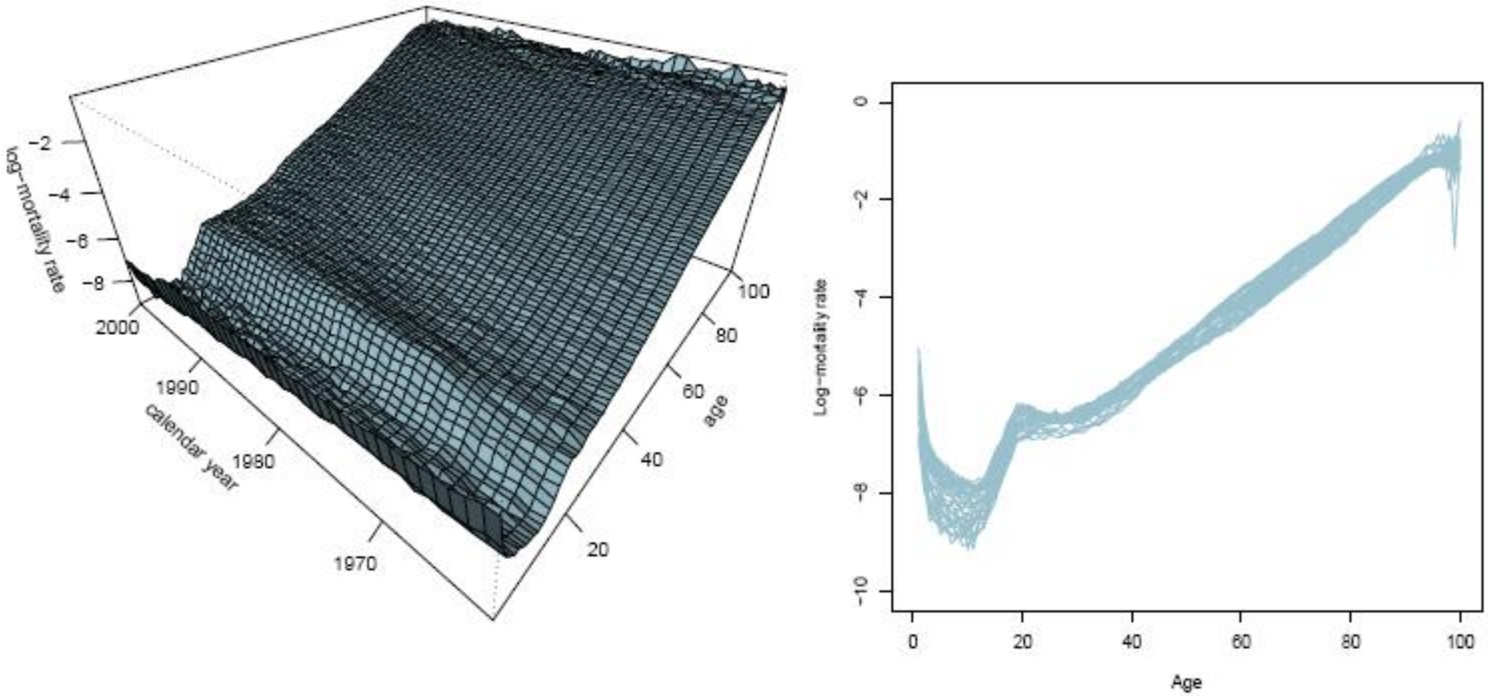


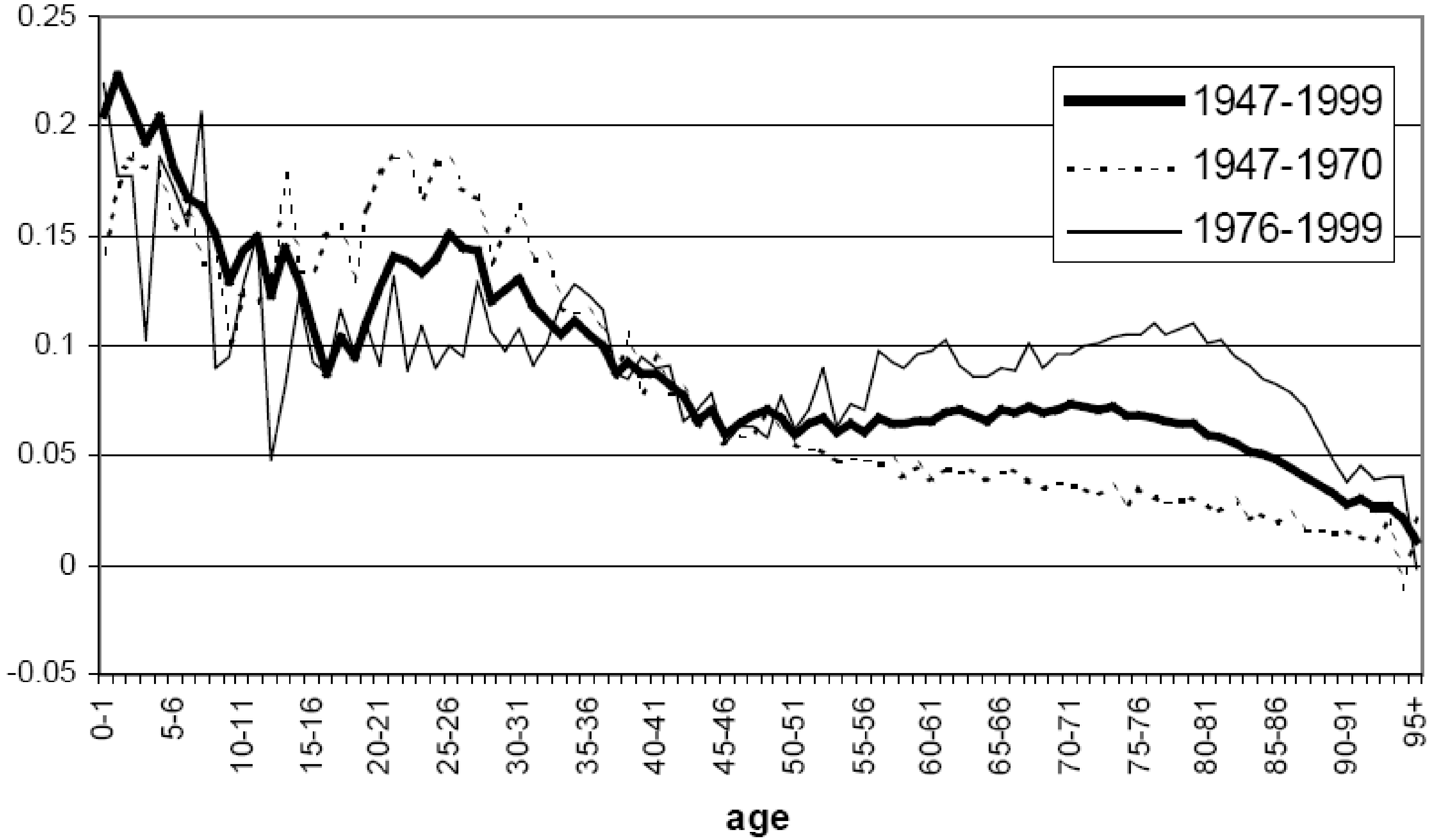
Figure 4 Log-mortality structure of French male, 1962-2000

Kappa(t) dans le modèle de Lee-Carter (UK & Wales)

$$\log \mu_{x,t} = \alpha_x + \beta_x \cdot \kappa_t + \varepsilon_{x,t}, \qquad \varepsilon_{x,t} \sim \mathcal{N}(0, \sigma),$$

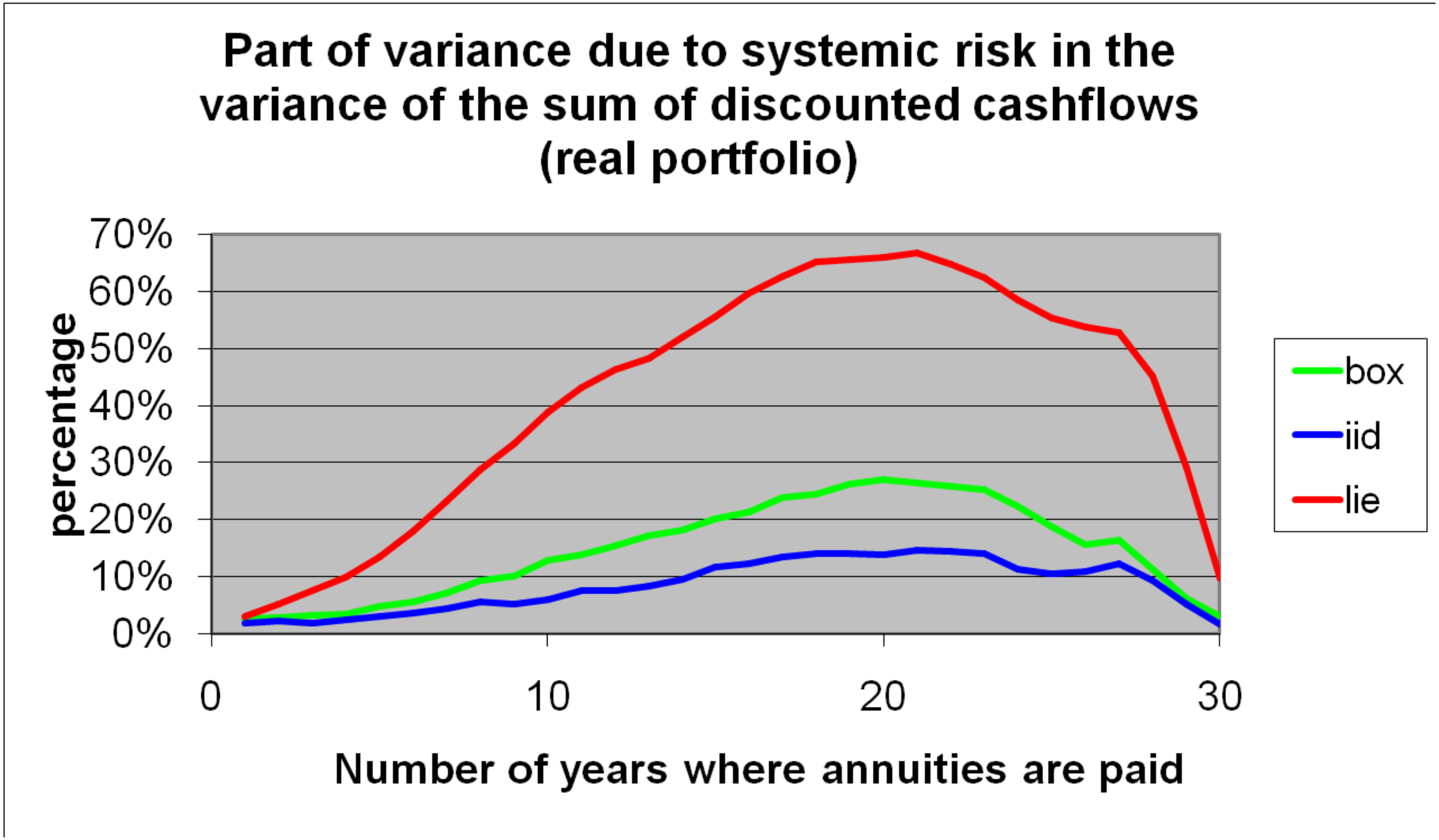
Des gains à des âges de plus en plus élevés

Figure 3.a: b_x schedule for the entire time series 1947-1999 and two selected subsamples 1947-1970 and 1976-1999, female



- Risque de mortalité
- Risque de longévité
  - Risque de longévité pur
    - Oscillations autour de la tendance
    - Risque d’échantillonnage et risque d’anti-sélection
    - Risque de changement de tendance
    - Modèles multivariés avec corrélations temporelle et inter-âges
  - Risques financiers
    - Taux d’intérêt à long terme
    - Risque de contrepartie

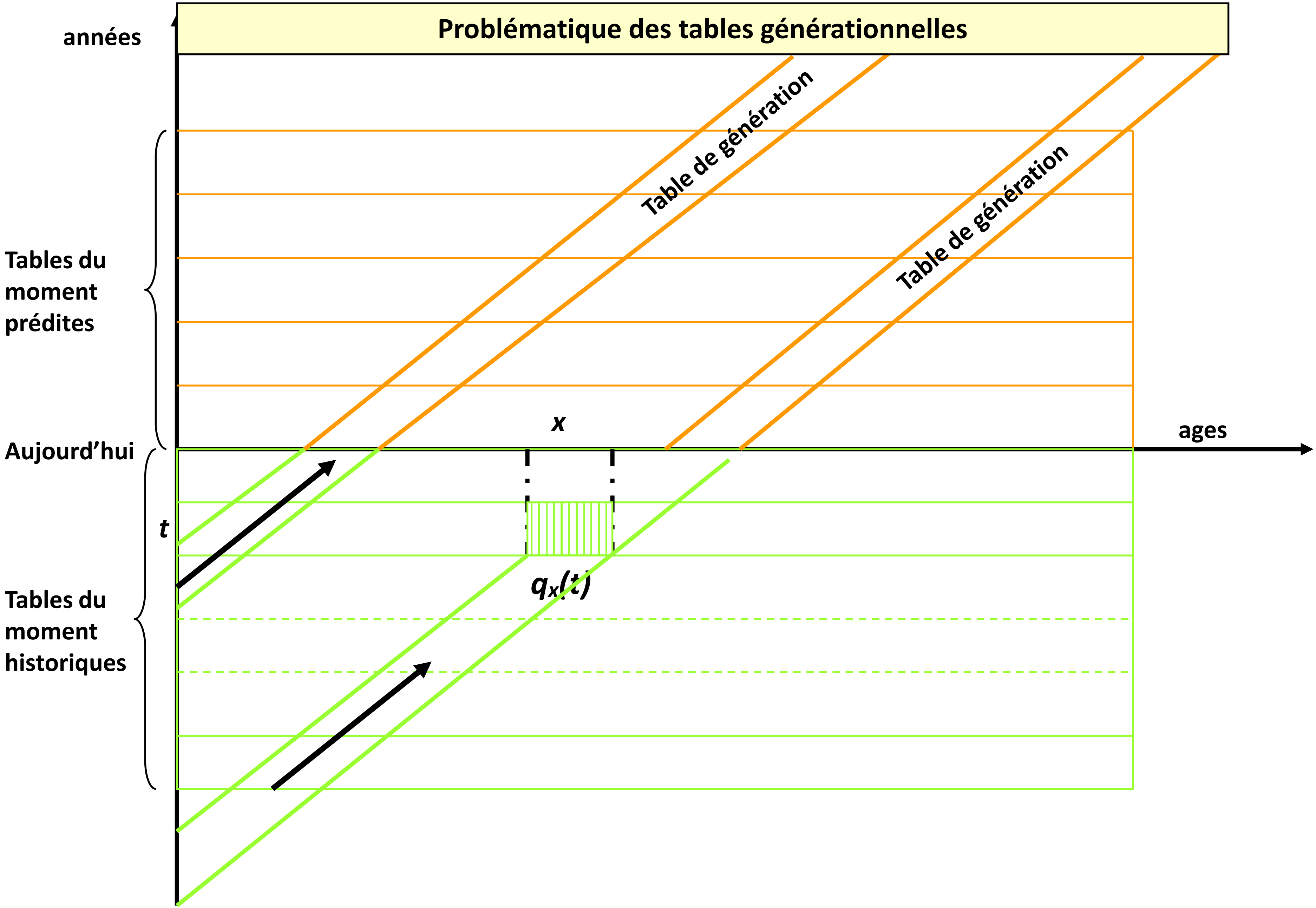
Part du risque systémique par maturité



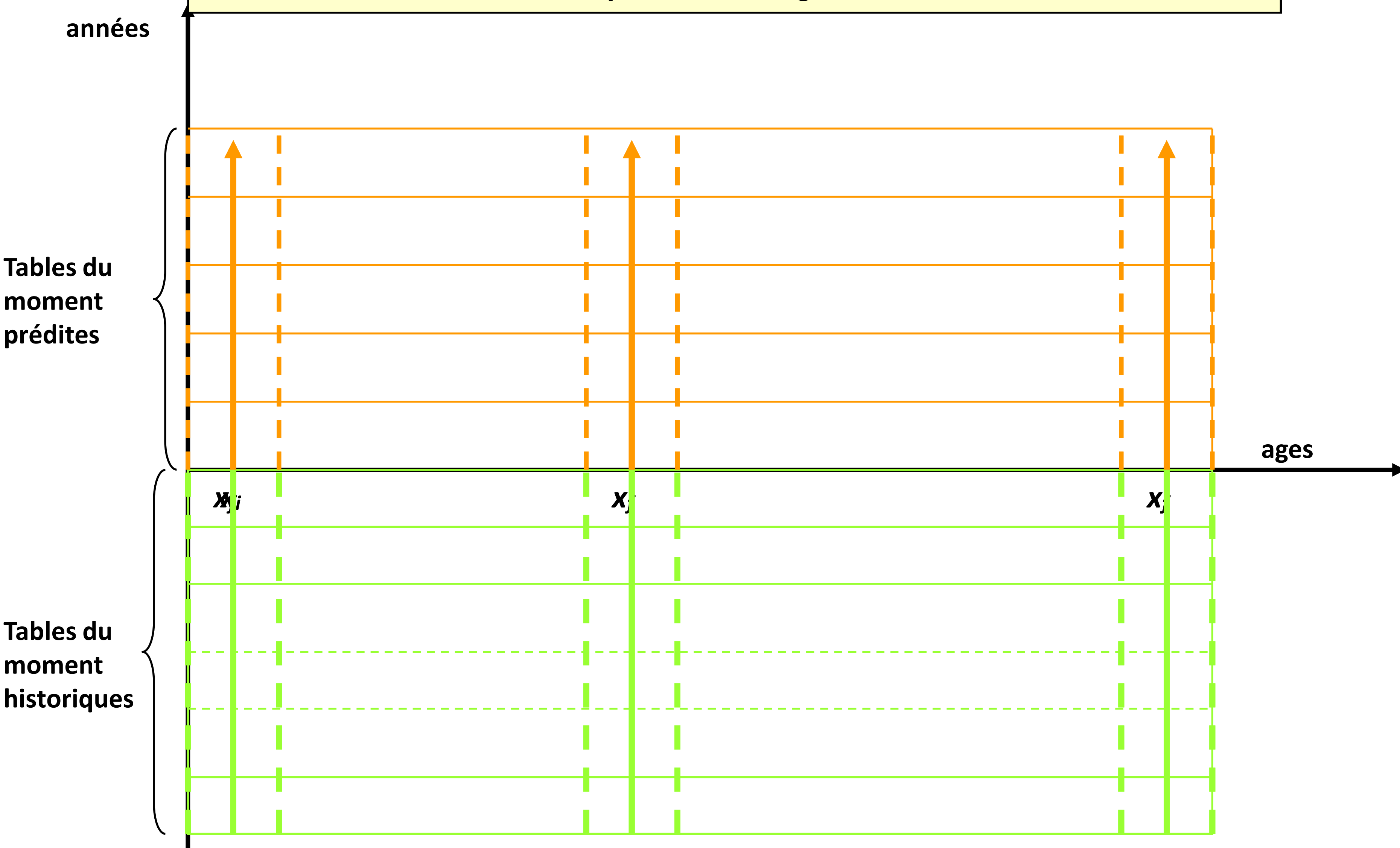
Mortalité des assurés et de la population nationale

- Niveaux de longévité et vitesses d'amélioration différents pour les assurés et pour la population nationale.
- En France, tables prospectives refaites en 2006 par Daniel Serant
- Données souvent insuffisantes pour une approche directe
- Utilisation de méthodes relationnelles
- Hausse de 8% en moyenne des provisions (les tables précédentes dataient de 1993)
- Solvabilité II: hétérogénéité des tables en vigueur en Europe
- Trop de mesures d'implémentation repoussées du Niveau 2 au Niveau 3.

Problématique des tables générationnelles



Problématique des tables générationnelles



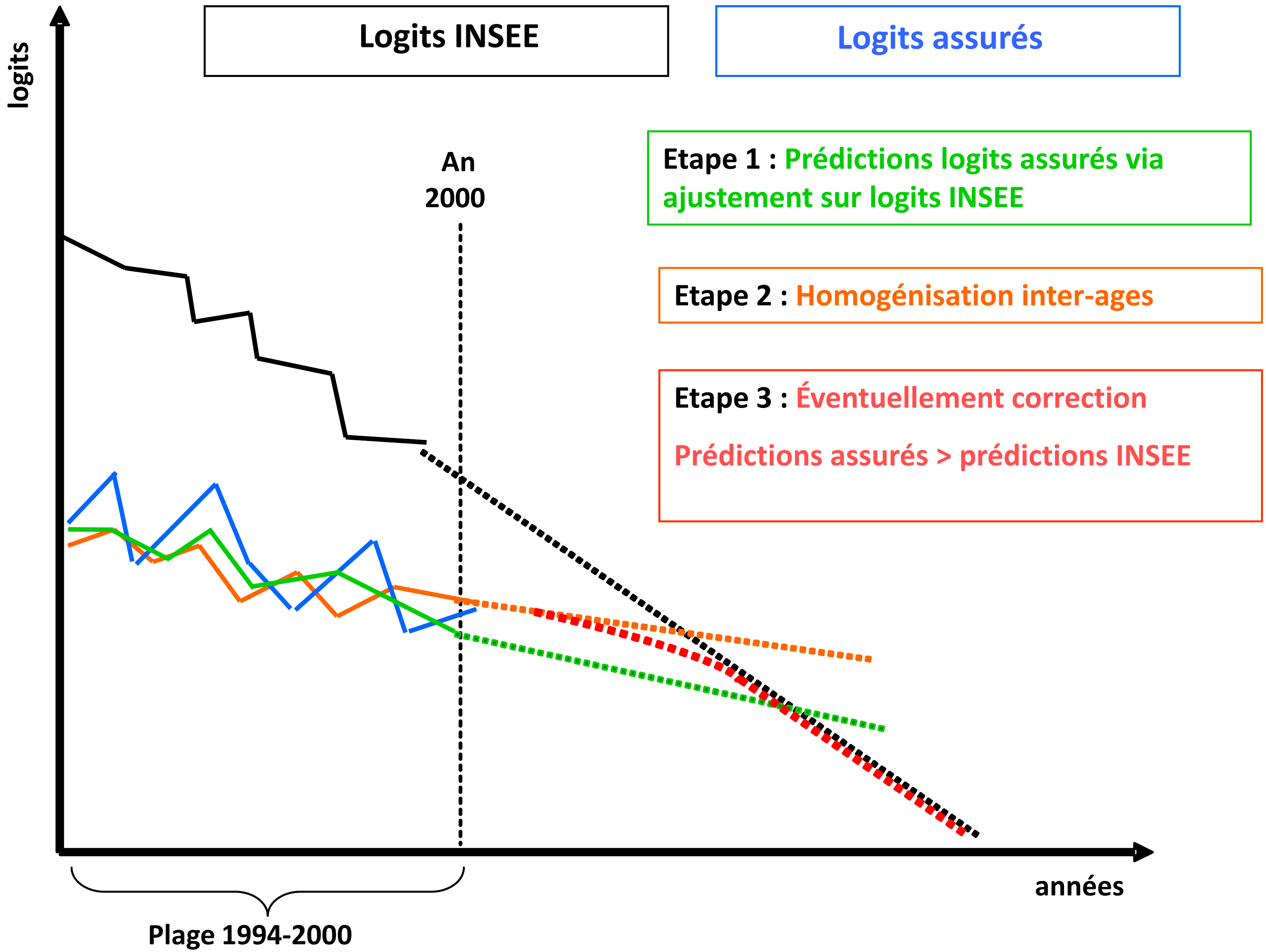
Objectif :prolonger les séries $t \longrightarrow q_x(t)$

age par age ou globalement

Tables du moment & tables prospectives
Impact sur l'espérance de vie à la naissance

Figure 2 Periodic life expectancy (left) and generational life expectancy (right) at birth in the UK.

Construction par benchmark avec les tables prospectives nationales



Co-integration ou pas?

Stabilité dans le temps?

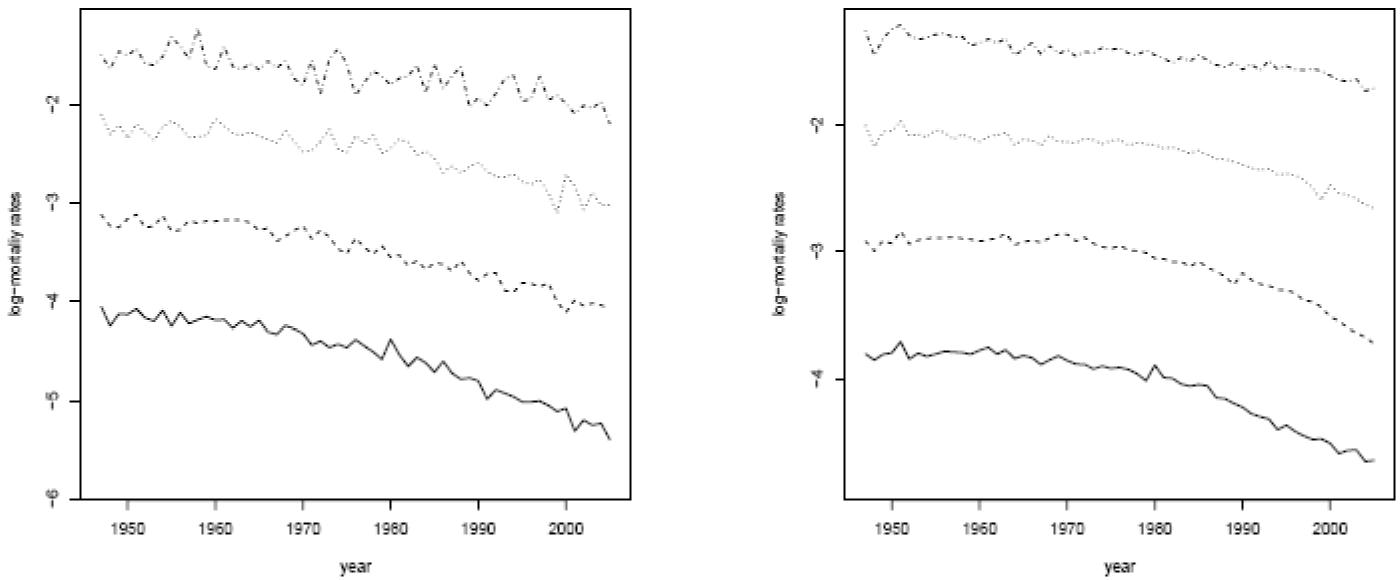


Figure 1 Mortality on logarithmic scale for both insured population (left) and national population (right) at different ages: 60 (solid), 70 (dashed), 80 (dotted) and 90 (dotdash).

Mécanismes de transfert de risque

- Risques de longévité et financier, ou l'un des deux principalement
  - Portefeuille de cédante ou produit sur indice
  - Swap de flux de rentes ou véritable assurance
- Réassurance de portefeuilles de cédantes :
  - nécessité de s'adapter aux spécificités de chaque cédante
  - en effet, risque d'échantillonnage et d'hétérogénéité entre cédantes
  - Ce risque est mutualisable par le réassureur
  - Risque systémique de dérive de dérive de la longévité (non mutualisable)
  - Intérêt de la titrisation pour le réassureur pour se protéger contre ce risque systémique
- Titrisation à partir d'un produit sur indice :

  – Reste pour la cédante le risque d'écart entre la longévité de ses assurés et celle concernée par l'indice

  – Marché inexistant, nécessité de se caler sur un indice

  – Swap de longévité ou survivor bond, adaptable ou non aux spécificités de chaque cédante

Un risque très complexe

Risque de longévité

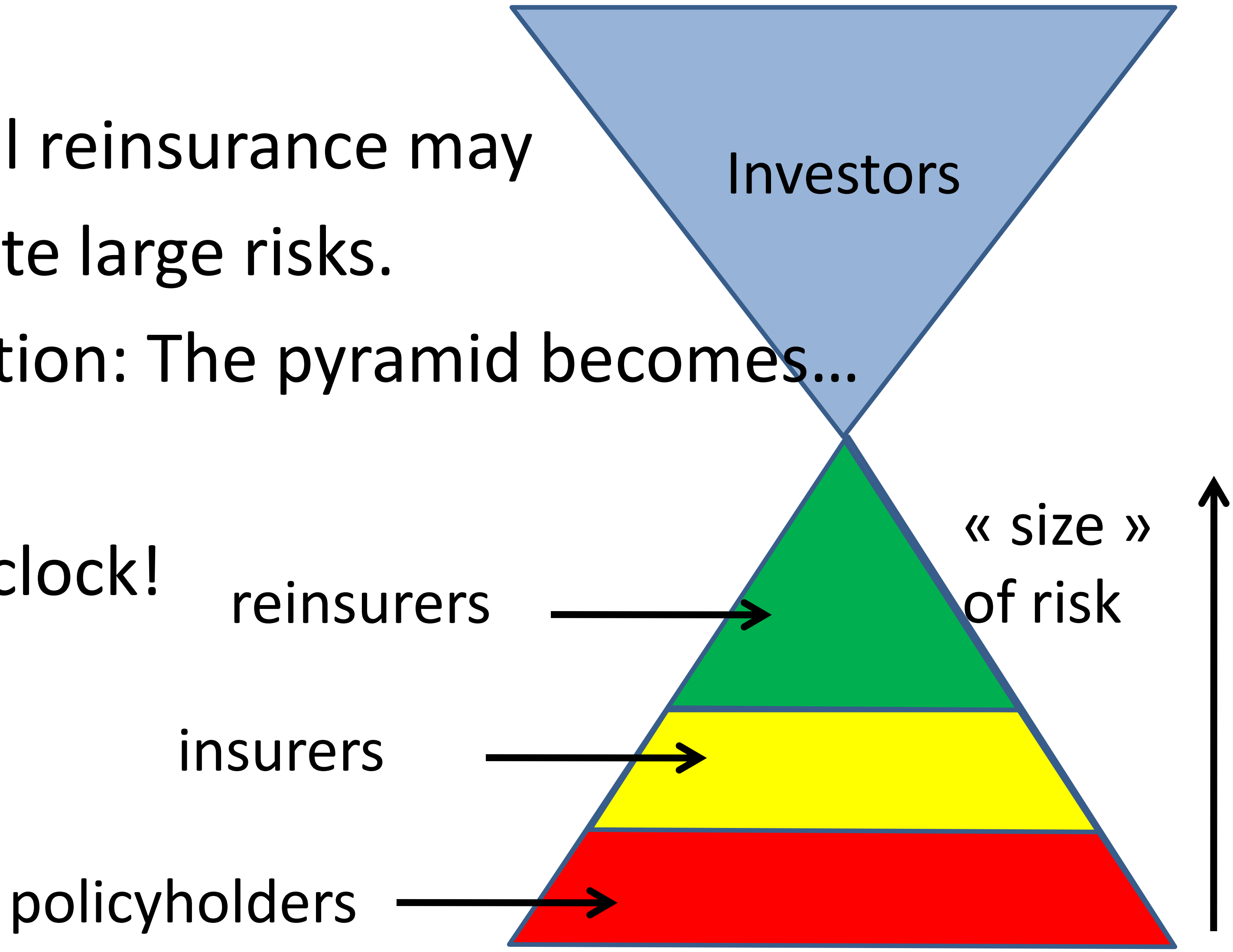
- Risque de longévité pur
  - Oscillations autour de la tendance
  - Risque d'échantillonage et risque d'antisélection
  - Risque de changement de tendance
- Risques financiers
  - Taux d'intérêt à long terme
  - Risque de contrepartie
- Corrélations assurance-finance?

Reinsurance vs securitization

Traditional reinsurance may concentrate large risks.

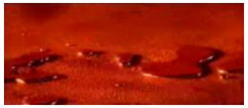
Securitization: The pyramid becomes…

… a sand-clock!



Securitization: does it always atomize risk?

Securitization: does it always atomize risk?



Risk does not disappear. It is just transferred, recombined, and so correlation crises may occur.

Complexité, risques extrêmes-> fort risque de modèle

Compute the 99.5% Value at Risk of the mortality force at age 90.2 in calendar year 2025 in your country, and in France.

- Longevity or mortality risk?
- Risk that the question is misunderstood.
- Mortality force of mortality rate.
- Longevity improvements or not?
  - Lee-Carter or other?
- Gaussian hypothesis?
- What kind of extreme scenarios is relevant?
- Negative values!

	0,182	0,215	
	0,186	**-0,0011666**	
	0,0384	0,176	
	0,0755	0,0652	
	0,1079		
	0,9915		
	0,125		
		138,636733	61,618818
March 09		Oct. 09	
Life Stream			

Le problème d’évaluation

- Méthodes d’évaluation dites actuarielles

- Méthodes d’évaluation dites financières

Méthodes d'évaluation financières et actuarielles

- Méthodes actuarielles basées sur le choix d'une mesure de risque:
  - Value-at-Risk, Tail-Value-at-Risk, Wang-transform, autres mesures de distorsion cohérentes, pricing par écart-type, etc…
  - Chargement de sécurité: le prix est en général égal à l'espérance plus une prime de risque (la Market Value Margin ou Risk Margin dans Solvabilité II par ex.).
  - Diversification possible sous certaines conditions
  - Approche coût du capital pour déterminer la MVM dans Solvabilité II: la prime de risque est obtenue en actualisant les capitaux à mettre dans le futur en face de ces risques

(cf présentation d'hier de Yannick).

Méthodes d’évaluation financières et actuarielles

- Méthodes financières basées sur l’évaluation en univers risque-neutre:
  - Changement de mesure de probabilité: la mesure de probabilité dite historique P est remplacée par la mesure de probabilité risque-neutre notée Q.
  - Le prix d’un produit financier est alors l’espérance des flux futurs actualisés **sous Q**.
  - En marché complet, en absence d’opportunité d’arbitrage, dans les modèles classiques, Q existe et est unique*.
  - Le prix d’un contrat est obtenu en fonction de la stratégie de couverture à mettre en place pour répliquer les flux futurs.

* En général il faut l’hyp. d’Harrison et Pliska (1981)

Convergence des deux méthodes

Un exemple piqué à Pierre Devolder

- Ces deux méthodes ne sont déjà pas si différentes initialement:
- Considérons un marché complet mono-périodique avec 2 actifs, et sans opportunité d'arbitrage:
  - Actif A (sans risque) : 1€ $\longrightarrow$ 1.03 €
  - Actif B (risqué) : 1€ $\xrightarrow{p=1/2}$ 1.12€ (hausse) ; 1€ $\xrightarrow{1-p=1/2}$ 0.98€ (baisse)
  - On souhaite évaluer un produit d'assurance contre une baisse du marché actions : l'actif C (comme cat).

Convergence des deux méthodes

Actif C :

$$? \begin{cases} \xrightarrow{p=1/2} 103€ \text{ (hausse du marché)} \\ \xrightarrow{1-p=1/2} 106€ \text{ (baisse du marché)} \end{cases}$$

Approche financière:

Convergence des deux méthodes

Actif C : $? \begin{cases} \xrightarrow{p=1/2} & 103€ \text{ (hausse du marché)} \\ \xrightarrow{1-p=1/2} & 106€ \text{ (baisse du marché)} \end{cases}$

- Approche financière:
  - sous la probabilité risque-neutre Q, tous les actifs ont le même rendement moyen. La probabilité q de hausse sous Q est donc:

    1.12q+0.98(1-q)=1.03, soit q=0.357.
  - Le prix de l'actif C est alors donné par l'espérance sous Q du payoff actualisé:

    $$[103q+106(1-q)]/1.03 = 101.87€$$
  - Prix expliqué par $\begin{cases} 1.03a+1.12b=103 \\ 1.03a+0.98b=106 \end{cases}$
  - Le portefeuille répliquant est constitué de quantités a=123.30 d'actif A et b=-21.43 d'actif B. Prix du portefeuille répliquant: a+b=101.87€.
- Approche actuarielle:
  - On peut par ex. calculer le payoff moyen actualisé (sous P):

    [103p+106(1-p)]/1.03 = 101.46€ et rajouter une prime de risque (ou chargement de sécurité).
  - On retrouve 101.87€ = 101.46€ + 0.41€ si le taux de chargement est de 0.4%.

Convergence des deux méthodes

Actif C : $? \xrightarrow{p=1/2}$ 103€ (hausse du marché)

$\xrightarrow{1-p=1/2}$ 106€ (baisse du marché)

- Approche financière:
  - sous la probabilité risque-neutre Q, tous les actifs ont le même rendement moyen. La probabilité q de hausse sous Q est donc:

    1.12q+0.98(1-q)=1.03, soit q=0.357.
  - Le prix de l'actif C est alors donné par l'espérance sous Q du payoff actualisé:

    [103q+106(1-q)]/1.03 = 101.87€
  - Prix expliqué par $\begin{cases} 1.03a+1.12b=103 \\ 1.03a+0.98b=106 \end{cases}$
  - Le portefeuille répliquant est constitué de quantités a=123.30 d'actif A et b=-21.43 d'actif B. Prix du portefeuille répliquant: a+b=101.87€.
- Approche actuarielle:
  - On peut par ex. calculer le payoff moyen actualisé (sous P):

    [103p+106(1-p)]/1.03 = 101.46€ et rajouter une prime de risque (ou chargement de sécurité).
  - On retrouve 101.87€ = $\underbrace{101.46€}_{\text{Best estimate}}$ + $\underbrace{0.41€}_{\text{MVM}}$ si le taux de chargement est de 0.4%.

Convergence des deux méthodes

- Dans l'approche financière, le passage à la probabilité risque-neutre contient la notion de prime de risque comme dans l'approche actuarielle.
- IFRS et Solvabilité II: risques diversifiables vs risques non diversifiables. Seuls les risques non diversifiables doivent donner lieu à une prime de risque supplémentaire.
- La notion de diversification:
  - Correspond à la sous-additivité de la mesure de risque en méthode d'évaluation actuarielle
  - Est contenue dans la théorie du portefeuille de Markovitz: l'introduction d'ILS (rendements potentiellement élevés et faible corrélation avec les marchés financiers traditionnels) a un impact positif et fait bouger la frontière efficiente favorablement. Plus la corrélation est faible, plus l'impact est significatif. Cela explique l'intérêt de certains investisseurs pour les ILS. Attention toutefois à la définition et la calibration de la corrélation !

Incomplétude du marché

- Dans l’exemple que nous avons vu, le marché est supposé complet (tous les actifs sont répliquables). Cela n’est évidemment pas le cas pour les ILS.
- Dans ce cas, en absence d’opportunité d’arbitrage*, l’existence d’une probabilité risque-neutre est préservée, mais le problème est qu’elle n’est plus unique.
- Le problème consiste alors à choisir la probabilité risque-neutre la plus pertinente:
  - Soit en cherchant à calibrer les prix sur le marché (problème: il est souvent embryonnaire ou peu liquide).
  - Soit en utilisant des prix de produits financiers existants qui ont des caractéristiques relativement proches (par ex. ratio de Sharpe).
- La notion de complétude est évolutive.
- Grâce aux ILS, le marché se complète petit à petit. On passera (un jour?) de prix *marked-to-model* à des prix *marked-to-market*.

Ex. de marché incomplet: les mortality-linked securities

- Ajout d'un risque de mortalité systémique : taux de mortalité annuel futur pour une personne d'âge x aléatoire :

  (q_x=0.05 avec probabilité r=0.5 et 0.15 avec probabilité 1-r=0.5).
- On suppose que le risque de mortalité est indépendant du risque précédent (financier).
- Prix obtenu par le choix d'une certaine probabilité risque-neutre globale, produit de deux probabilités risque-neutre (une pour le risque de mortalité et celle pour le risque financier).
- La probabilité risque neutre pour le risque de mortalité existe en absence d'opportunité d'arbitrage mais n'est plus unique.
- On l'obtient en choisissant une probabilité risque-neutre r* que q_x=0.05. Cette nouvelle probabilité r* doit être comprise entre 0 et r=0.5.
- Si le risque était diversifiable, alors il n'y aurait pas de prime de risque en théorie.
- Limite: la taille d'un portefeuille d'assurance ou de réassurance n'est pas infinie. Comment tenir compte de cette diversification imparfaite?

Problématique d'évaluation

- Modèles de taux d'intérêt à très long terme
- Accroissement de la vitesse d'amélioration de la longévité -> accroissement de l'impact du vieillissement de la population sur l'économie
- Corrélation à long terme avec l'économie et les risques financiers
- Trop long terme pour le marché? Lien avec la présentation de Robert Kast.

Risque d'instabilité du marché

Détection de changement de tendance:

Risque de réaction excessive du top management des sociétés d'assurance, des marchés financiers et des réassureurs en cas de « fausse alerte »

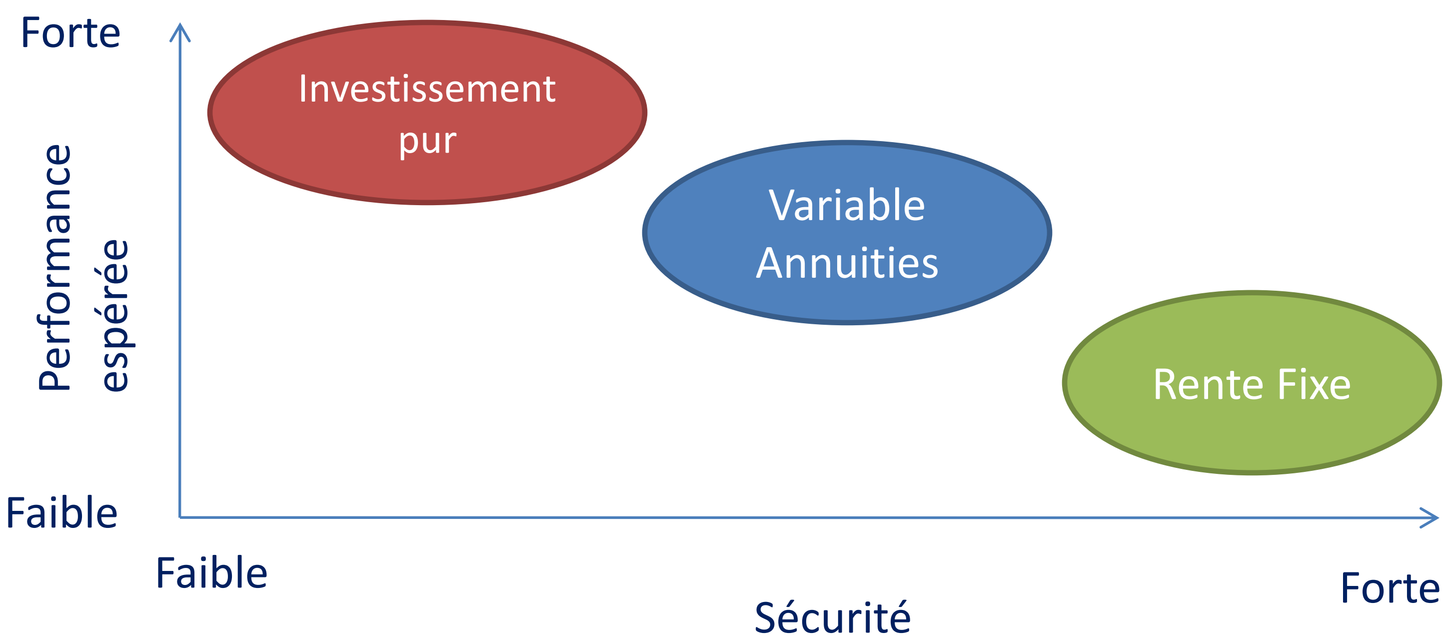
Asymétrie d'information toujours néfaste au développement de la titrisation (cat-bonds)

Impact sur la détection pour les différents acteurs

Travail en cours avec N. El Karoui, C. Mazza et Y. Salhi

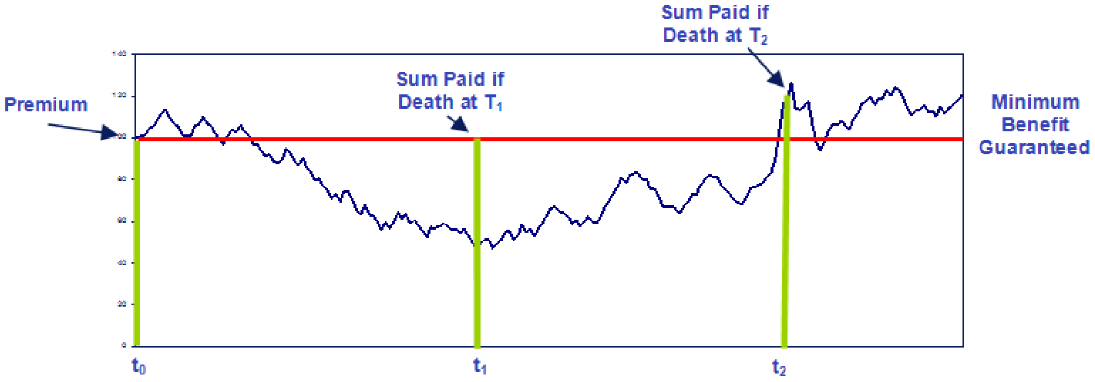
Exemple de modèle utilisé en pratique pour les Variable Annuities

- Variable Annuities
  - Contrats en unité de compte
  - Garanties en cas de vie et de décès



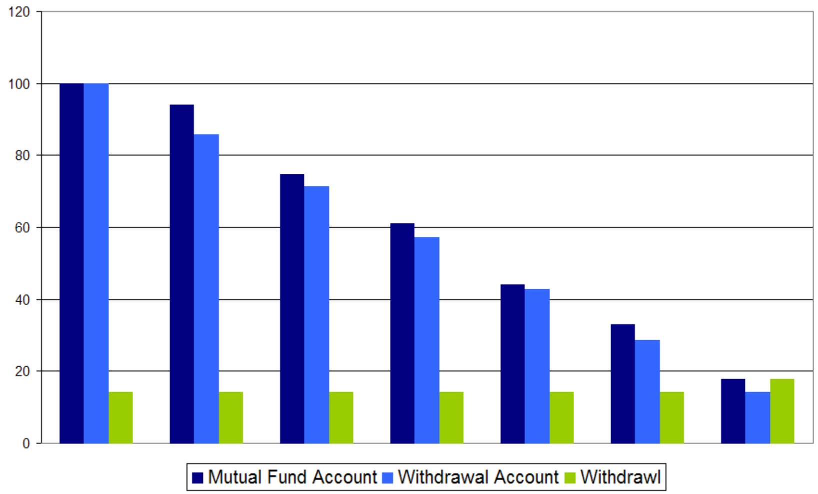
Introduction : Les garanties

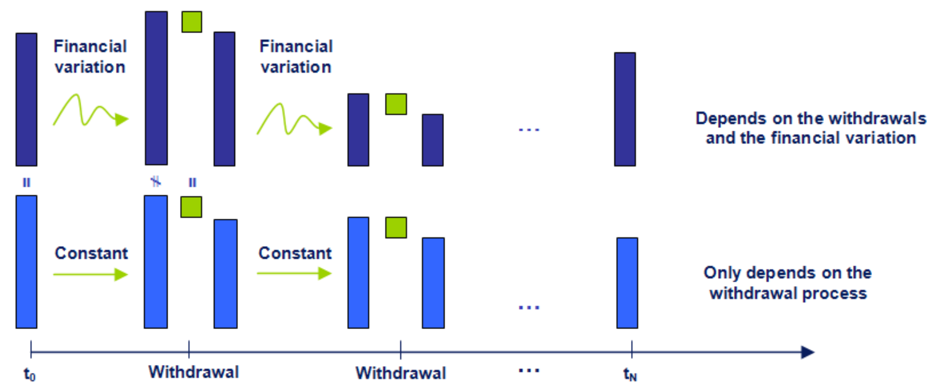
- GMDB (Guaranteed Minimal Death Benefit)
  - Garantie plancher
  - Garantie en cas de décès



- GMAB (Guaranteed Minimal Accumulation Benefit)
  - Montant garanti en cas de vie
- GMIB (Guaranteed Minimal Income Benefit)
  - GAO
  - Garantie des caractéristiques de rente (taux ou table)
  - Garantie en cas de vie

- GMWB (Guaranteed Minimal Withdrawal Benefit)
  - Garantie de retrait





- GLWB (Guaranteed Lifetime Withdrawal Benefit)
  - GMWB for life

Introduction : Le rachat et la garantie GMWB / GLWB

- La garantie GMWB / GLWB est particulièrement sensible au comportement de rachat de l'assuré.
- On ne suppose pas un comportement optimal de l'assuré, mais
  - Mieux l'assuré connaît son produit, plus sa conduite peut changer
  - Il existe des entreprises conseillant l'assuré pour l'optimisation de son contrat d'assurance
  - Un contrat GMWB dure à long terme, il ne faut pas sous-estimer l'évolution du comportement de l'assuré
- Etudier le comportement optimal de l'assuré permet à l'assureur d'estimer son exposition au risque de rachat
- Pour optimiser, on choisit une méthode analytique

Le modèle pour GMWB : Le modèle de base

- Hypothèses
  - Marché complet, sans arbitrage possible, pas de coût de transaction, vente à découvert illimitée
  - Pas de frais et commission modélisés
  - La mortalité est indépendante du marché financer
  - Le sous-jacent (portefeuille composé d'actions, obligations, etc.) suit un mouvement Brownien géométrique

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t$$

  - Le compte de l'assuré suit le mouvement suivant :

$$\begin{cases} dW_t = (r-\alpha)W_t dt - G dt + \sigma W_t dB_t & \text{if } W_t > 0 \\ dW_t = 0 & \text{if } W_t = 0 \\ W_0 = \omega_0 & \end{cases}$$

  - Remarque: actualisation, chargement sur encours et retraits sont modélisés en continu.

Le modèle pour GMWB : Le rachat statique

- Le rachat statique
  - Le retrait G est constant.
  - On montre que la relation suivante est vérifiée :

$$\underbrace{e^{-rT} E_0^Q \left[\frac{1}{Y_T} \left[1 - \frac{1}{T} \int_0^T Y_t dt \right]^+ \right]}_{\text{Option Quanto-Asiatique}} + \underbrace{\frac{g}{r}(1 - e^{-rT})}_{\text{Rente}} = 1$$

  - Procédures pour estimer la valeur de l'Option Quanto-Asiatique
    - Approximation Log-Normale
    - Borne Inférieure de Rogers et Shi
    - Equation différentielle de Vêcer

Le modèle pour GMWB : Le rachat dynamique

- Le rachat dynamique
  - L'assuré fait des rachats optimaux avec une taux de rachat γ_t
  - Ce qu'il reste de la garantie est représenté par un compte

$$A_t = A_0 - \int_0^t \gamma_s ds, \qquad 0 \leq \gamma_0 \leq \lambda$$

  - Une pénalité de rachat s'applique sur le montant de rachat au-dessus du retrait fixe g. Ainsi, si

$$h(\gamma_s) = \begin{cases} \gamma_s & \text{if } 0 \leq \gamma_s \leq G \\ G + (1-k)(\gamma_s - G) & \text{if } \gamma_s > G \end{cases}$$

  - La valeur du GMWB est

$$V(W, A, t) = \max_{(\gamma_s)_{s \in]0,T[} \in \mathcal{A}} E_t \left[\underbrace{e^{-r(T-t)} \max(W_T, 0)}_{\text{what is left in the account}} + \underbrace{\int_t^T e^{-r(u-t)} h(\gamma_u) du}_{\text{what will be withdrawn}} \right]$$

Le modèle pour GMWB : Le rachat dynamique

- Le rachat dynamique
  - Grâce au théorème de Hamilton-Jacobi-Bellman

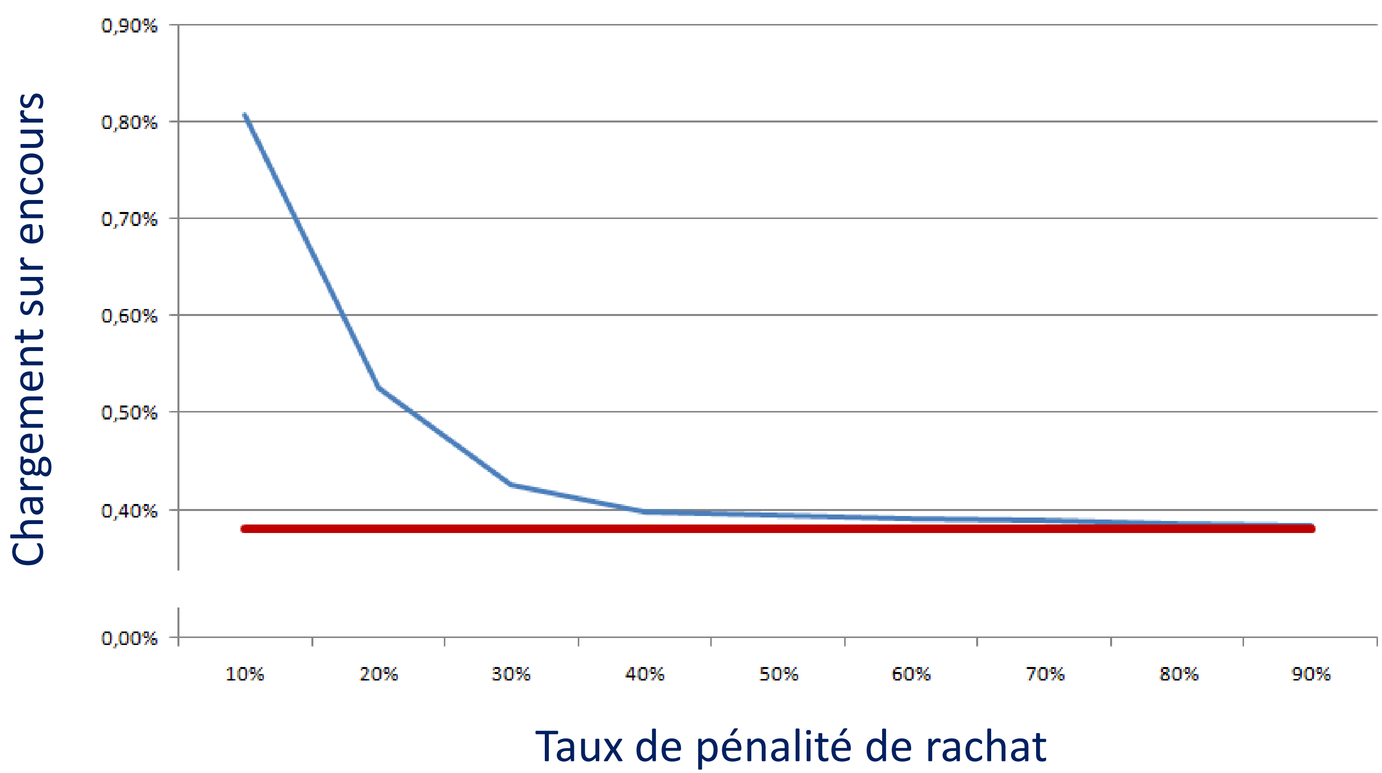
$$\frac{\partial V}{\partial t} + g\left(\frac{\partial V}{\partial A} + \frac{\partial V}{\partial W}\right) + (r-\alpha)W\frac{\partial V}{\partial W} + \frac{1}{2}\sigma^2 W^2 \frac{\partial^2 V}{\partial W^2} - rV = 0$$

où

$$\begin{aligned} g(C) &= \begin{cases} (1-C)G & \text{si } (1-k) < C \leq 1 \\ kG + \lambda(1-k-C) & \text{si } 0 \leq C \leq (1-k) \end{cases} \\ &= G\min(1-C,k) + \lambda\max(1-k-C,0) \end{aligned}$$

Le modèle pour GMWB : Le rachat dynamique

- Exemple Numérique de la relation entre le rachat statique et le rachat dynamique



Le modèle pour GMWB : Le rachat total optimal

- Le rachat total optimal
  - Nouvelles clauses pour les produits GMWB modélisables avec rachat total
    - Step-up
    - Ajustements des caractéristiques du contrat en cas de rachat partiel
  - Modèle plus complet

$$H_t = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_v dv} \underbrace{W_T \frac{S_x(T)}{S_x(t)}}_{\text{Echéance}} + \int_t^T e^{-\int_t^u r_v dv} \left(\underbrace{g \frac{S_x(u)}{S_x(t)}}_{\text{Retrait}} + \underbrace{W_u \frac{f_x(u)}{S_x(t)}}_{\text{Décès}} \right) du \right]$$

    - Mortalité
    - Taux d'intérêt variable (déterministe ou stochastique)
  - Application du théorème de Feynman-Kac

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \mathcal{L}H + g - (H_t - W_t)\mu_x(t) - r_t H_t = 0$$

    - Où $\mu_x(t)$ est le taux de mortalité

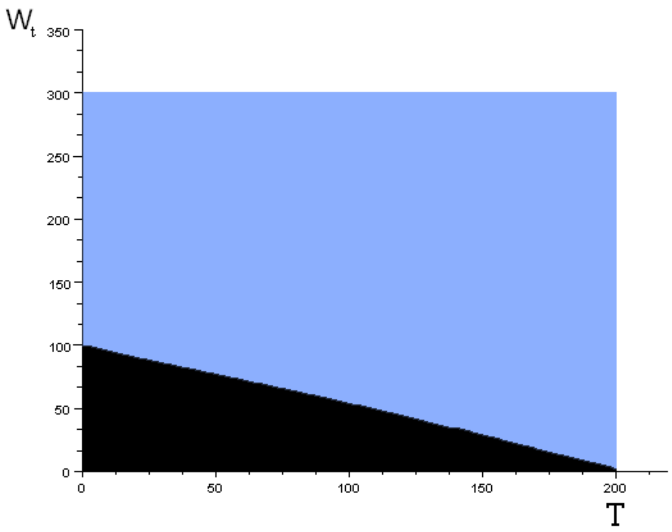
Le modèle pour GMWB : Le rachat total optimal

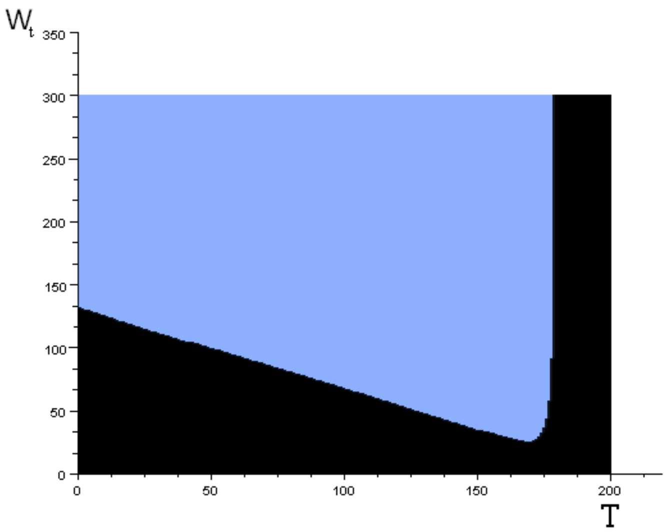
- Le rachat total optimal
  - En suivant la méthodologie des options américaines, on définit :

$$H_{t^-} = \max(W_t, H_{t^+})$$

  - Avec pénalité de rachat :

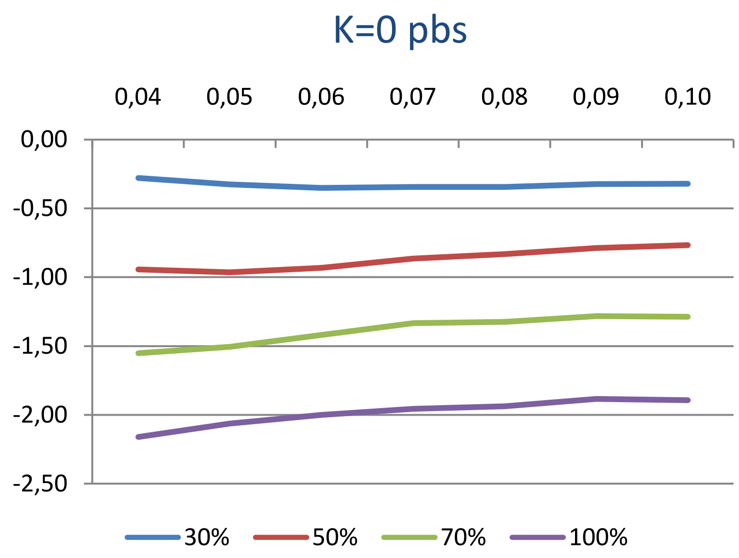
$$H_{t^-} = \max(H_{t^+}, (1-k)W_t)$$

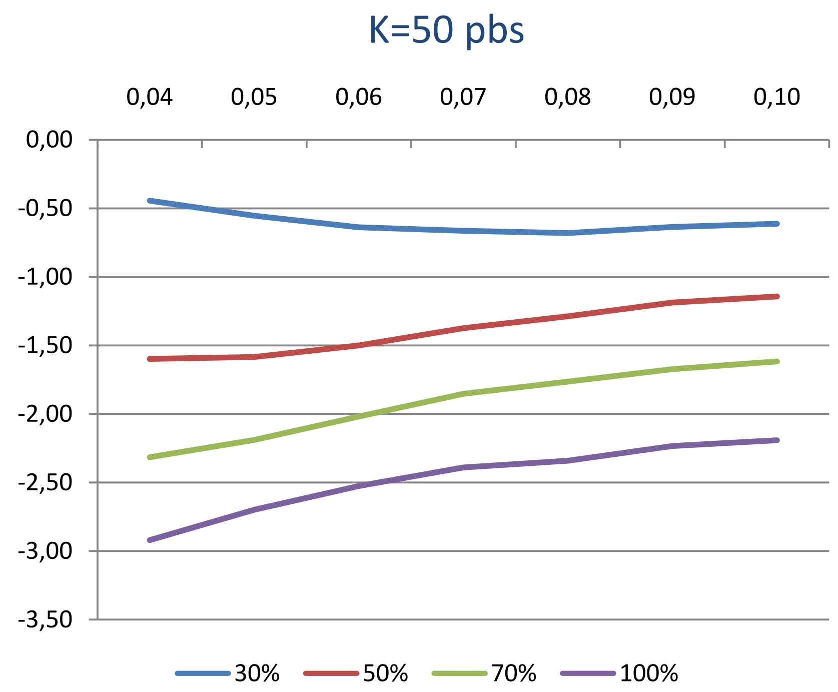




GMWB et QIS 4

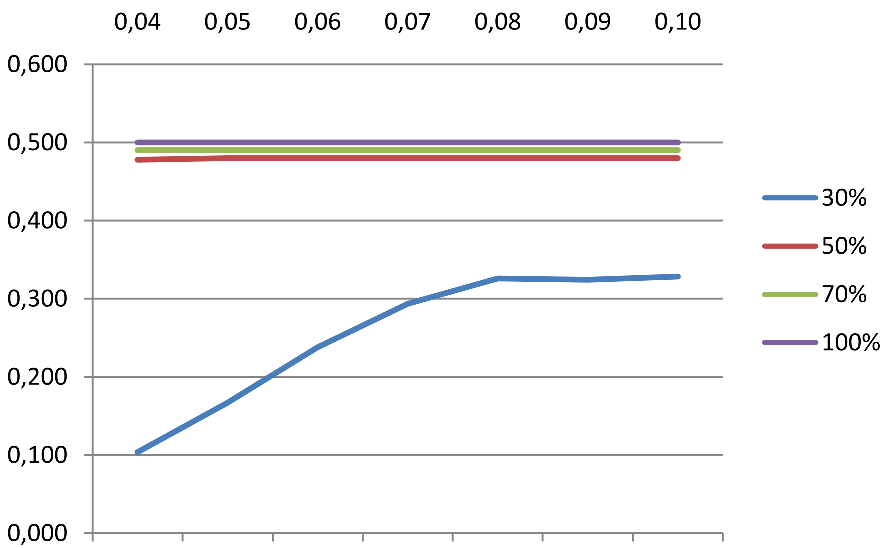
- Risque de taux d'intérêt
  - Impact sur la valeur de 100€ en cas de baisse des taux



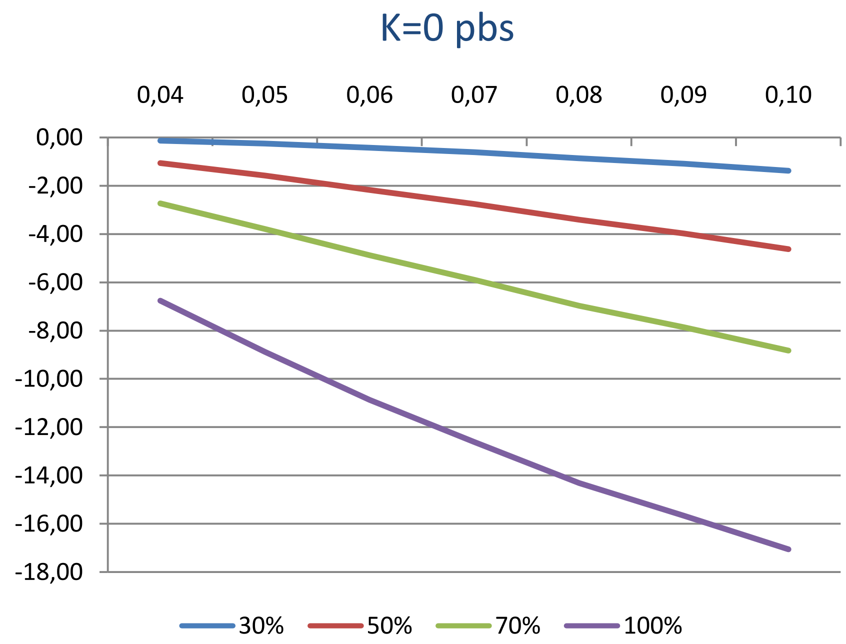


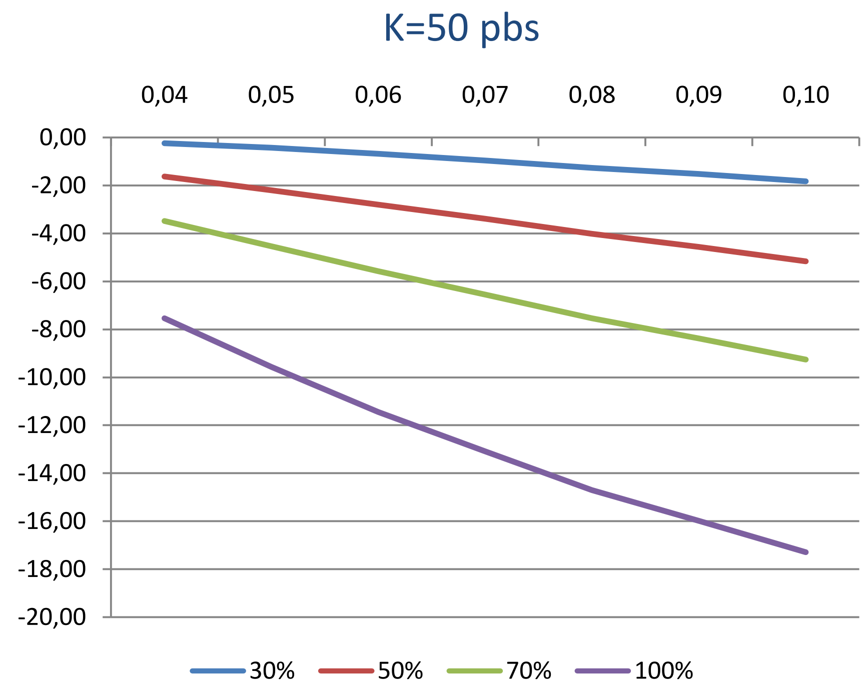
GMWB et QIS 4

- Risque de taux d'intérêt
  - Impact sur la valeur de 100€ en cas de hausse des taux
    - K = 0 pbs : Pas de changement de la valeur, pas de gain pour l'assureur
    - K = 50 pbs : borné par la pénalité de rachat multipliée par la valeur de l'actif après chocs



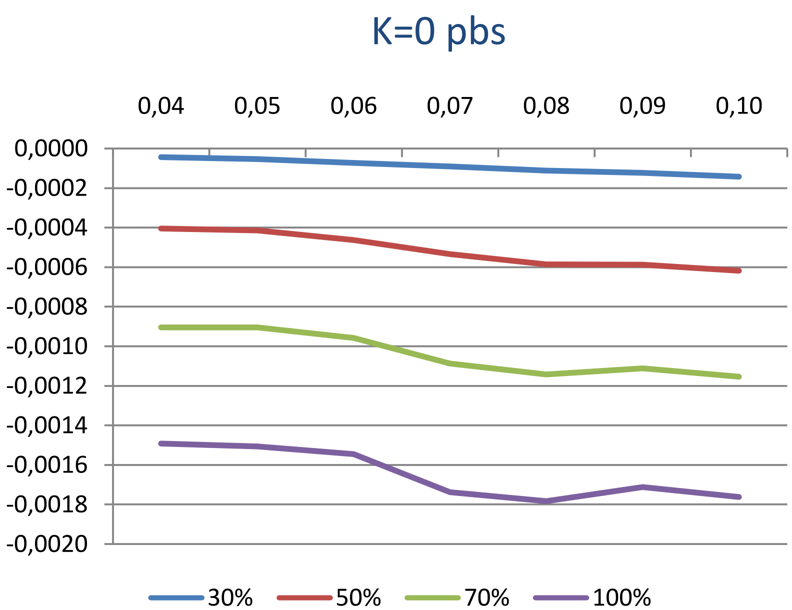
- Risque actions

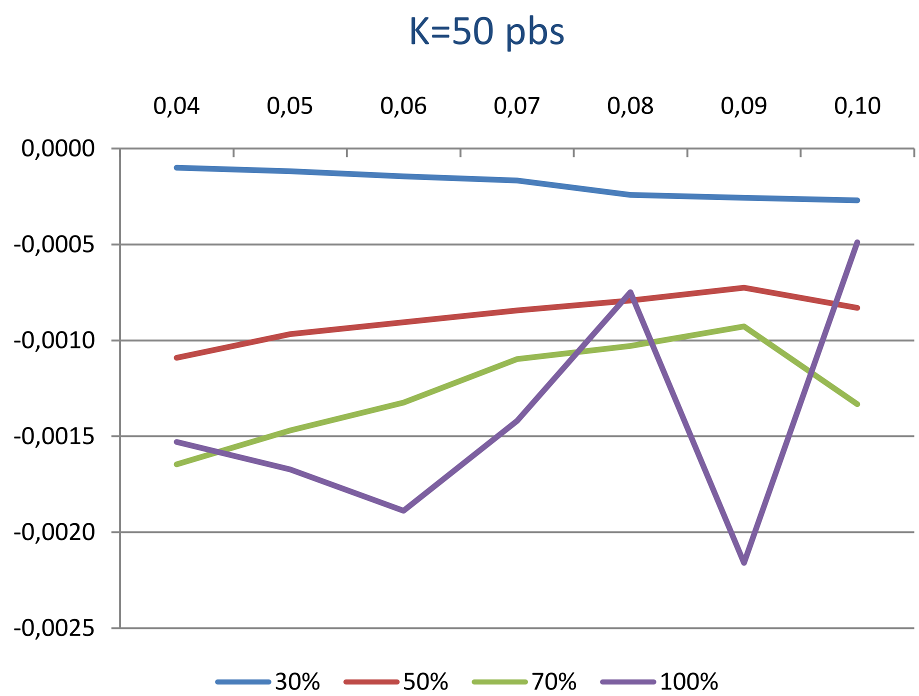




GMWB et QIS 4

- Risque de longévité





- Risque de Mortalité
  - Changement de la valeur presque nul
- **Et les effets croisés?**

Travail avec Laurent Devineau

- Un médico dice a una mujer:
- -A usted solo le queda un año de vida.
- Ella pregunta:
- -Realmente no hay nada que hacer?
- El médico le dice
- -Claro, usted puede cadarse con un actuario.
- Ah, y eso me hara vivir mas tiempo?